Existência de Soluções para uma classe de problemas com condição de Neumann

Thiago Grando

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
CENTRO DE MATEMÁTICA COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO-CMCC
DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC-UFABC
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA APLICADA

Programa: Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Edson Alex Arrazóla Iriarte

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da UFABC/CAPES

Santo André, 28 março de 2011

Existência de Soluções
para uma classe de problemas
com condição de Neumann

Esta versão definitiva da dissertação
contém as correções e alterações sugeridas pela
Comissão Julgadora durante a defesa realizada
por Thiago Grando em 28/03/2011.

Comissão Julgadora:

- Profa. Dr. Edson Alex Arrázola Iriarte (orientador) - CMCC-UFABC
- Prof. Dra. Ilma Marques - CMCC-UFABC
- Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares - ICMC-USP

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora a quem devo minha vida.

Agradeço a minha mãe Elizabet.

Agradeço aos de minha família que sempre acreditaram em mim, em especial a minha avó a qual sempre levo em meu coração e a tenho em minhas orações.

Agradeço ao meu orientador Edson Iriarte pelo compromisso, amizade, responsabilidade que teve durante meu período de aprendizado. Agradeço a ele também ao exemplo que me deu em olhar para matemática e encarar as dificuldades.

Agradeço aos professores Ilma Marques, Antônio Faleiros, Cristian Colleti, Rodney Bassanezy, Valério Ramos, Maurício Lima e Márcio Silva, pela formação que me deram durante todo período de aulas.

Agradeço aos amigos que fiz durante minha vida acadêmica na UFABC.

Agradeço ao Pedro Lucas pelo companheirismo e amizade durante meu período de estudos.

Agradeço aos professores amigos do DEMAT-UNICENTRO, em especial a Zeza, Marlon e Rosana.

Agradeço a professora Lorena, pela sua enorme paciência no período do curso de verão e pela motivação que me deu em todo período acadêmico.

Agradeço a minha professora de matemática dos ensinos fundamental e médio, Marilene que sempre me incentivou para a matemática.

Agradeço a UFABC e a CAPES pelo auxilio financeiro.

Resumo

Estudaremos a existência de soluções não-triviais para o problema com condição de Neumann,

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} -u'' &= f(x,u), x \in I \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ e $f : \overline{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Estudamos as condições de compacidade e geométricas do funcional de Euler-Lagrange Φ associado ao problema (P). Assim, verificamos que Φ satisfaz a condição do Teorema de Silva [9] que nos garante a existência de ao menos uma solução não trivial a (P).

Palavras-chave: existência de soluções, condição de Neumann, funcional de Euler-Lagrange.

Abstract

We study the existence of nontrivial solutions of the Neumann boundary problem

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} -u'' &= f(x,u), x \in I \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \end{cases}$$

where $I \subset \mathbb{R}$ and $f : \overline{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function. We study the compactness and geometrical condictions of a Euler-Lagrange functional assossiated to the problem (P). Then, we apply Silva's theorem, which assures us the existence of at least one nontrivial solution to (P).

Keywords: existence of solutions, Neumann problem, the Euler-Lagrange functional.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\overline{I}$	Fecho do intervalo $I \subset \mathbb{R}$
$C^1(I, \mathbb{R})$	Conjunto das funções de classe C^1 defindas em I com imagem real
$C_c^1(I)$	Conjunto das funções de classe C^1 com suporte compacto em I
$L^1(I)$	Conjunto das funções integráveis em I
$L^2(I)$	Conjunto das funções de quadrado integrável em I
$W^{1,p}(I)$	Espaço de Sobolev
$X_1 \oplus X_2$	Soma direta dos subespaços X_1 e X_2
$\partial B_\rho(0)$	Fronteira da bola centrada em 0 e de raio ρ
(X, d)	Espaço X munido da métrica d
$\|x\|$	Norma de x
$(X, \|.\|)$	Espaço X munido da norma $\|.\|$
$C([a, b])$	Conjunto das funções contínuas definidas em $[a, b]$
$l^p(\mathbb{R})$	Conjunto das funções reais p-somáveis
$\dim X$	Dimensão do espaço X
X'	Espaço dual de X
X''	Espaço bidual de X
$\|I\|$	Medida do conjunto I
$\rightharpoonup$	Convergência fraca
$\subset\subset$	Imersão compacta

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho de dissertação, estudamos a existência de soluções não-triviais do problema (P) abaixo, com condições de Neumann na fronteira

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} -u'' &= f(x,u), \quad x \in I \\ u'(0) &= u'(1) = 0, \end{cases}$$

onde $I =]0,1[\subset \mathbb{R}$ e $f : \overline{I} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Em 1994, *David Arcoya* e *Salvador Villegas* [4], estudaram o problema (P), supondo as seguintes condições sobre a função f:

(f_1) Existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lim_{s \to -\infty} f(x,s) - \lambda s = 0, \text{ uniformemente para } x \in \overline{I}.$$

(f_2) Existem $s_0 > 0$ e $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tais que

$$0 < F(x,s) \leq \theta s f(x,s), \quad \forall x \in I, \quad \forall s \geq s_0,$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ é a primitiva de f.

(f_3) $\dfrac{f(x,s)}{s} > 0, \quad \forall x \in \overline{I}, \quad \forall s \in \mathbb{R} - \{0\}.$

(f_4) Existem $\epsilon > 0$ e $\alpha \in (0, \lambda_1)$ tais que

$$\frac{f(x,s)}{s} \leq \alpha, \quad \forall x \in \overline{I}, \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon) - \{0\},$$

onde $\lambda_1 = \pi^2$ é o primeiro autovalor estritamente positivo do problema de autovalor

$$\begin{cases} -u'' &= \lambda u, \quad x \in I \\ u'(0) &= u'(1) = 0. \end{cases}$$

A condição (f_1) nos diz que f é uma função assintóticamente linear em $-\infty$. Geometricamente isto significa que a partir de um valor grande negativo f se aproxima de uma reta. A condição (f_2), conhecida como condição de *Ambrosetti-Rabinowitz*, implica que f é superlinear em $+\infty$, isto é,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty.$$

Ainda, de (f_3), temos que $f(x,0)=0$, o que implica que (P) possui solução trivial.

O resultado de existência de solução não trivial para o problema (P) é dado no seguinte Teorema:

Teorema 1.0.1 *Seja $I=]0,1[$, e supondo as hipóteses $(f_1)-(f_4)$, com $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$. Então o problema (P) possui, ao menos, uma solução não trivial.*

Problemas de Neumann envolvendo somente as condições (f_1) e (f_2), foram estudados por De Figueiredo e Ruf [5]. Eles estudaram o seguinte problema:

$$(1) \quad \begin{cases} -u'' &= f(x,u)+h(x) \equiv \lambda u + g(x,u) + h(x), x \in I \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{cases}$$

onde f é uma função contínua, $h \in L^2(I), h \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Entre outros resultados eles provam a existência de uma solução para (1) se f satisfaz (f_1) e (f_2) e λ é tal que $0<\lambda<\dfrac{\pi^2}{4}$. Observemos que de (1) temos o problema (P).

O funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (P) é dado por

$$\begin{aligned} \Phi : H^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} && (1.1) \\ u &\longmapsto \Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x,u(x))dx, && (1.2) \end{aligned}$$

onde $F(x,u)=\displaystyle\int_o^u f(x,t)dt$. Como os pontos críticos de Φ são tais que

$$0 = \langle \Phi'(u), v\rangle = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \int_0^1 f(x,u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(I),$$

temos que eles são soluções fracas do problema (P). Sendo assim, para provarmos a existência de solução fraca não-trivial de (P), precisamos encontrar um ponto crítico diferente de zero para o funcional Φ. Assim, para provar o Teorema 1.0.1, em [4], usa-se a seguinte generalização do Teorema do Passo da Montanha, demonstrada por Silva,

Teorema 1.0.2 (Silva[9]) *Seja $H = X_1 \oplus X_2$, um espaço de Banach real, onde X_1 é um subespaço de dimensão finita. Supondo que o funcional $\Phi \in C^1(H,\mathbb{R})$ satisfaça as seguintes condições:*

(I_1) $\Phi(u) \leq 0, \forall u \in X_1$.

(I_2) *Existe $\rho>0$ tal que $\Phi(u)\geq 0$, para toda $u \in \partial B_\rho(0)\cap X_2$.*

(I_3) *Existe $e \in X_2 - \{0\}$ e $\beta \geq 0$ tal que $\Phi(u) \leq \beta$ para cada $u \in X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$.*

Além disso, se Φ satisfaz a condição de Palais-Smale (P.S.), então Φ possui ao menos um ponto crítico em H diferente de zero.

Observamos que este Teorema nos garante a existência de um ponto crítico diferente de zero para o funcional Φ, se este satisfaz as condições geométricas (I_1), (I_2) e (I_3), e a condição de compacidade de Palais-Smale.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

No **Capítulo 2** apresentamos os principais resultados de Análise Funcional, que considero fundamentais para a leitura do presente trabalho, e também a caracterização variacional do problema (P).

No **Capítulo 3**,verificamos as condições $(I_1) - (I_3)$ do Teorema 2. Para isso, escreveremos o espaço $H^1(I)$ como soma direta dos subespaços X_1 e X_2, onde X_1 será o subespaço das funções constantes, e X_2 seu complemento ortogonal, ou seja $X_2 = X_1^{\perp}$. Observamos que, no caso do problema (P), a condição (I_3) se verifica, se e somente se, $\lambda > \dfrac{\pi^2}{4}$.

No **Capítulo 4**, mostramos a condição (PS) para o funcional Φ definido em (1.1), usando idéias similares as de [5].

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos as definições e os resultados de Análise que nos auxiliarão na leitura dos capítulos seguintes. Alguns dos temas abordados aqui são: espaços de Banach, espaços de Banach reflexivos, espaços L^p e espaços de Sobolev $W^{1,p}$. Na parte final do capítulo introduzimos os conceitos de derivada de Gâteaux e de Fréchet, e apresantamos a caracterização variacional de (P).

Algumas informações relevantes a respeito dos espaços de Banach, dos operadores compactos e suas propriedades e dos espaços de Sobolev podem ser encontradas em [2] e [6].

2.2 Resultados de Análise Funcional

2.2.1 Espaços normados e Espaços de Banach

Definição 2.2.1 (Sequência de Cauchy) *Uma sequência* (x_n) *em um espaço métrico* $X = (X, d)$ *é dita de Cauchy se para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0.$$

Para que uma sequência de números reais seja de Cauchy, exige-se que, para valores suficientemente grandes de m, n, seus termos x_m e x_n se aproximem arbitrariamente uns dos outros.

Observação 2.2.1 *O espaço métrico* (X, d) *é dito completo se toda sequência de Cauchy em* X *converge para um elemento de* X.

Exemplo 2.2.1 *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é um espaço métrico completo.*

Definição 2.2.2 (norma) *Uma norma em um espaço vetorial real* X *é uma função* $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *cujo valor em um ponto* $x \in X$ *é denotado por* $\|x\|$*(lê-se "‘norma de x") e que possui as seguintes propriedades:*

(N_1) $\|x\| \geq 0$

(N_2) $\|x\| = 0$, *se e somente se,* $x = 0$

(N_3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

(N_4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

onde $x, y \in X$ *são arbitrários e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2.2 *Dizemos que um espaço vetorial real é normado quando possui uma norma definida nele.*

Uma classe de espaços vetoriais normados, muito importante são aqueles que são completos em relação a sua norma.

Definição 2.2.3 (Espaço de Banach) *Dizemos que um espaço* $(X, \|\|)$ *é de Banach se ele é um espaço normado completo em relação a sua norma.*

Exemplo 2.2.2 *O espaço* $C([a,b])$ *das funções contínuas no intervalo* $[a,b]$ *munido da norma*

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$$

é um espaço de Banach.

De fato, seja $(x_m) \subset C[a,b]$ uma sequência de Cauchy. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_m - x_n\| = \max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon, \quad \text{sempre que} \quad m, n > n_0. \tag{2.1}$$

Logo para cada $t = t_0 \in [a,b]$ fixado, temos

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon, \quad \text{sempre que} \quad m, n > n_0.$$

Isto mostra que $(x_1(t_0), x_2(t_0), ...)$ é uma sequência real de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, segue que

$$x_m(t_0) \longrightarrow x(t_0), \quad \text{quando} \quad m \longrightarrow \infty.$$

Deste modo, podemos associar a cada $t \in [a,b]$, um único número real $x(t)$. Isso define uma função x em $[a,b]$. Vamos mostrar que $x \in C[a,b]$ e que $x_m \longrightarrow x$. De (2.1) temos que

$$\max_{t\in[a,b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0.$$

Além disso, para cada $t \in [a,b]$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \quad \forall m > n_0.$$

Isso mostra que a sequência $(x_m(t))$ converge para $x(t)$ uniformemente no intervalo $[a,b]$. Como os x_m´s são contínuos em $[a,b]$ e a convergência é uniforme, segue que x é contínua em $[a,b]$. Assim $x \in C[a,b]$. Daí, $x_m \longrightarrow x$ em $[a,b]$. Portanto $C[a,b]$ é espaço de Banach.

Definição 2.2.4 (normas equivalentes) *Seja* X *um espaço vetorial real, e sejam* $\|.\|_1$ *e* $\|.\|_2$ *duas normas definidas em* X. *Dizemos que* $\|.\|_1$ *é equivalente a* $\|.\|_2$, *se existem números positivos* k_1 *e* k_2 *tais que*

$$k_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2 \|x\|_1, \forall x \in X.$$

Definição 2.2.5 (conjunto compacto) *Um subconjunto K de um espaço métrico (X, d) é dito compacto se toda sequência limitada em X possui uma subsequência convergente.*

O Lema abaixo nos dá uma propriedade geral para os subconjuntos compactos de espaços métricos.

Lema 2.2.1 *Um subconjunto compacto de um espaço métrico é fechado e limitado.*

Demostração: Ver em [6], página 77. □

Teorema 2.2.1 (Riesz) *Sejam Y e Z subespaços de um espaço normado X (de dimensão qualquer), e suponha que Y é fechado e é subconjunto próprio de Z. Então para cada número real θ no intervalo $(0, 1)$ existe $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ e $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demostração: Consideremos $v \in Z - Y$. Seja d a distância entre os conjuntos $Z - Y$ e Y, ou seja,

$$d = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$

Como Y é fechado, vemos que $d > 0$. Consideremos então, $\theta \in (0, 1)$. Pela definição de ínfimo, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$d \leq \|v - y_0\| \leq \frac{d}{\theta},$$

já que $0 < \theta < 1$ implica $\dfrac{d}{\theta} > d$. Seja $z = c(v - y_0)$, onde $c = \dfrac{1}{\|v - y_0\|}$. Logo, $\|z\| = 1$. Queremos mostrar que $\|z - y\| \geq \theta$ para todo $y \in Y$. Então,

$$\begin{aligned} \|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\left\|v - y_0 - c^{-1}y\right\| \\ &= c\|v - y_1\|, \end{aligned}$$

onde $y_1 = y_0 + c^{-1}y$. Como $y_1 \in Y$, segue pela definição de d que $\|v - y_1\| \geq d$. Assim,

$$\|z - y\| = c\|v - y_1\| \geq c \cdot d = \frac{1}{\|v - y_0\|} \geq \frac{d}{d/\theta} = \theta.$$

□

Em espaços de dimensão finita a recíproca do Lema 2.2.1 é sempre verdadeira (ver [6], pág,77), o que nem sempre é válido em espaços de dimensão infinita. O próximo resultado nos mostra que nestes espaços a bola unitária não é compacta.

Teorema 2.2.2 *Se um espaço normado X tem a propriedade que a bola unitária*

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

é compacta, então a dimensão de X é finita.

Demostração:

Suponhamos por absurdo que B é compacto com $\dim X = \infty$. Escolhemos então $x_1 \in X$, tal que $\|x_1\| = 1$. Logo, x_1 gera um subespaço X_1 de X, tal que $\dim X_1 = 1$. Além disso, temos que X_1 é fechado e próprio, já que $\dim X = \infty$. Pelo Lema 2.2.1, existe $x_2 \in X$, tal que $\|x_2\| = 1$ e

$$\|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}.$$

Da mesma forma, os elementos x_1, x_2, geram um subespaço X_2 de X, que é fechado e próprio. Novamente pelo Lema 2.2.1, existe x_3 em X, tal que,

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \forall x \in X_2.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \|x_3 - x_1\| &\geq \frac{1}{2} \\ \|x_3 - x_2\| &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Procedendo desta maneira por indução, obtemos uma sequência (x_n), cujos elementos são $x_n \in B$ tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}.$$

Assim, (x_n) não possui subsequência convergente, o que é uma contradição com o fato de que B é compacto. Assim a dimensão do espaço X é finita.

□

A Proposição abaixo nos mostra que a imagem de um compacto por funções contínuas é um conjunto compacto.

Proposição 2.2.1 *Sejam X e Yespaços métricos, $M \subset X$ compato e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Então $f(M)$ é um compacto de Y.*

Demostração: Ver em [2], página 81. □

Como consequência imediata da Proposição 2.2.1 temos que uma aplicação contínua definida em um subconjunto compacto de um espaço métrico sobre o conjunto $\mathbb{R}$, atinge um máximo e mínimo neste subconjunto, ou seja,

Corolario 2.2.1 (Weierstrass) *Seja (X, d) um espaço métrico, $M \subset X$ compacto e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então f atinge seu máximo e mínimo em algum $x_0 \in M$.*

Demostração: Ver em [2] página 81. □

2.2.2 Funcionais Lineares

Definição 2.2.6 (Operadores lineares) *Sejam X e Y dois espaços vetoriais sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e seja $T : X \longrightarrow Y$ uma transformação. Dizemos que T é um operador linear de X em Y se*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.2.7 (Operadores limitados) *Sejam X, Y, espaços vetoriais sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito limitado se existe $C \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X .$$

Definição 2.2.8 (Operador linear contínuo) *Sejam X, Y, espaços vetoriais sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Um operador linear $T : X \to Y$ é contínuo em $x \in X$, se para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$, temos $T(x_n) \to T(x)$.*

Teorema 2.2.3 *Dizemos que um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo se e somente se, T é limitado*

Demostração: Ver em [6], página 97. □

No estudo dos espaços vetoriais reais normados, existem operadores lineares $T : X \to \mathbb{R}$ que possuem grande importância no campo da Análise Funcional. Tais operadores são chamadas de **funcionais lineares**.

Definição 2.2.9 (funcional linear) *Seja X um espaço vetorial sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O operador linear $T : X \to \mathbb{R}$ é chamado de funcional linear.*

Definição 2.2.10 (funcional linear limitado) *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que o funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ é limitado, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in X.$$

Observação 2.2.3 *A norma de um funcional linear $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, é dada por*

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0 \right\}.$$

Exemplo 2.2.3 *O funcional $\varphi : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\varphi(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ é linear e limitado em $C[a, b]$.*

De fato, sejam $f_1, f_2 \in C[a, b]$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1 + \lambda f_2) &= \int_a^b (f_1 + \lambda f_2)(x)dx \\
&= \int_a^b (f_1(x) + \lambda f_2(x))dx \\
&= \int_a^b f_1(x)dx + \lambda \int_a^b f_2(x)dx \\
&= \varphi(f_1) + \lambda\varphi(f_2).
\end{aligned}$$

Mostraremos agora que φ é limitado e possui norma $\|\varphi\| = b - a$.

Com efeito, seja $I = [a, b]$, então temos que:

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left| \int_a^b f(x)dx \right| \\
&\leq (b - a) \max \{|f(x)| : x \in I\} \\
&= (b - a) \|f\|_{C[a,b]} .
\end{aligned}$$

Tomando então, $\sup\left\{|\varphi(f)| : \|f\|_{C[a,b]} = 1\right\}$, temos que

$$\|\varphi\| \leq b - a.$$

Para mostrarmos que $\|\varphi\| \geq b - a$, vamos considerar $f \equiv f_0 = 1$. Então,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &\geq \frac{|\varphi(f_0)|}{\|f\|} \\ &= \int_a^b dx = b - a. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\varphi\| = b - a$.

O resultado a seguir dá uma a condição para que um funcional linear seja contínuo.

Teorema 2.2.4 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear. Então f é contínuo se, e somente se, f é limitado.*

Demostração: Ver em [6], página 104 □

Observação 2.2.4 *Vemos que o funcional definido no Exemplo 2.2.3 é um funcional contínuo.*

2.2.3 Espaço Dual e Espaços Reflexivos

Nesta seção estudaremos o espaço dos funcionais lineares de um espaço vetorial real. Daremos grande importância aos espaços cuja aplicação canônica definidas no conjunto $X \subset \mathbb{R}$ em seu bidual é sobrejetora. Estes espaços são chamados de espaços reflexivos.

Definição 2.2.11 (Espaço Dual) *Seja X um espaço normado. Chamaremos de espaço dual o espaço de todos os funcionais lineares limitados em X com a norma definida por*

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}.$$

Notação Denotamos por X' o dual do espaço X.

Para nos auxiliar no próximo exemplo, enunciaremos um importante resultado conhecido como desigualdade de Holder para sequências p e q somvéis.

Teorema 2.2.5 (Desigualdade de Holder) *Sejam as sequências $(x_n) \subset l^p(\mathbb{R})$ e $(y_n) \subset l^q(\mathbb{R})$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Então que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q\right]^{1/q} \tag{2.3}$$

Demostração: Ver em [6], página 14. □

Exemplo 2.2.4 *O dual do espaço $l^p(\mathbb{R}) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\right\}$, $1 < p < \infty$ é o espaço $l^q(\mathbb{R})$, onde q é o expoente conjugado de p, ou seja, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

De fato, seja $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, uma base de Schauder de $l^p(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0...) \\ e_2 &= (0,1,0,0...) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,..,1,0..). \end{aligned}$$

Cada elemento $x \in l^p(\mathbb{R})$ possui uma única representação, ou seja,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i.$$

Seja $f \in (l^p(\mathbb{R}))'$. Então

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i, \quad \text{onde} \quad f_i = f(e_i).$$

Vamos provar que $(f(e_i))_{i=1}^{\infty} \in l^q(\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos a sequência $y_n = (y_n^1, y_n^2, ..., y_n^j, ...)$ por

$$y_n^j = \begin{cases} \dfrac{|f_j|^q}{f_j}, & \text{se} \quad f_j \neq 0 \quad \text{e} \quad j \leq n \\ 0, & \text{se} \quad f_j = 0 \quad \text{ou} \quad j > n. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(y_n) = \sum_{j=1}^{\infty} y_n^j f_j &= \sum_{j=1}^{n} \frac{|f_j|^q}{f_j} f_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} 0 f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f_j|^q. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como f é limitada e $(q-1)p = q$, temos,

$$\begin{aligned} |f(y_n)| \leq \|f\| \, \|y_n\|_{l^p(\mathbb{R})} &= \|f\| \left[\sum_{j=1}^{n} |y_n^j|^p\right]^{1/p} \\ &= \|f\| \left[\sum_{j=1}^{n} |f_j|^{(q-1)p}\right]^{1/p} \\ &= \|f\| \left[\sum_{j=1}^{n} |f_j|^q\right]^{1/p}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donde segue que

$$f(y_n) \leq \|f\| \left[\sum_{j=1}^{n} |f_j|^q\right]^{1/p},$$

ou seja,

$$\left[\sum_{j=1}^{n} |f_j|^q\right]^{1-1/p} \leq \|f\| \quad \Leftrightarrow \quad \left[\sum_{j=1}^{n} |f_j|^q\right]^{1/q} \leq \|f\|, \tag{2.6}$$

onde $1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (2.6), temos

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^q\right]^{q} \leq \|f\|. \tag{2.7}$$

Assim, provamos que a sequência $(f_i)_{i=1}^{\infty} \in l^q(\mathbb{R})$.
Definimos então a aplicação

$$\begin{aligned} T : (l^p(\mathbb{R}))' &\longrightarrow l^q(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto T(f) = (f_i)_{i=1}^{\infty}, \end{aligned}$$

onde $f_i := f(e_i)$. Tomemos $f, g \in (l^p(\mathbb{R}))'$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g) = ((\alpha f + g)_i)_{i=1}^{\infty} &= (\alpha f_i + g_i)_{i=1}^{\infty} \\ &= \alpha (f_i)_{i=1}^{\infty} + (g_i)_{i=1}^{\infty} \\ &= \alpha T(f) + T(g). \end{aligned}$$

Logo T é linear.
Além disso, supondo que $f \in (l^p(\mathbb{R}))'$ é tal que $T(f) = 0$, temos

$$(f_i)_{i=1}^{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_i = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Isso resulta que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i = 0, \quad \forall x \in l^p(\mathbb{R}).$$

E portanto, T é injetiva.
Seja $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in l^q(\mathbb{R})$, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned} f_y : l^p(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = 0 \end{aligned}$$

define um elemento em $(l^p(\mathbb{R}))'$, ou seja, que f_y é linear e limitado. É fácil ver que f_y é linear. Basta mostrar que f_y é limitada. Usando a desigualdade de Holder,ver Teorema 2.2.5, temos,

$$\begin{aligned} |f_y(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \, \|y_i\| &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^q\right]^{1/q} \\ &= \|y\|_{l^q} \| x\|_{l^p}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos os x com norma igual a 1, vemos que $\|f\| \leq \|y\|_{l^q(\mathbb{R})}$. Logo, temos que f é limitada.

Novamente usando a desigualdade de Holder, temos

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i \right| &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^q \right]^{1/q} \\ &= \|T(f)\|_{l^q} \| x\|_{l^p} , \end{aligned}$$

passando ao supremo sobre todos os $x \in l^p(\mathbb{R})$ com norma 1 obtemos

$$\|f\| \leq \|T(f)\|_{l^q} . \tag{2.9}$$

Concluímos de (2.6) e (2.9) que as normas são iguais.

Definição 2.2.12 *Seja X um espaço vetorial real. O espaço dual de X' é chamado espaço bidual de X e é denotado por X''.*

Observação 2.2.5 *Por definição, um elemento do espaço vetorial X'' é um funcional linear*

$$\varphi : X' \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.2.5 *Seja X um espaço vetorial real. Então a cada $x \in X$ pode-se associar um elemento $\varphi_x \in X''$ da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} \varphi_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi_x(f) = f(x). \end{aligned}$$

Então temos que φ_x é linear e contínua.

De fato, φ_x é linear, pois para $f_1, f_2 \in X'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que: .

$$\begin{aligned} \varphi_x(\lambda f_1 + f_2) &= (\lambda f_1 + f_2)(x) \\ &= \lambda f_1(x) + f_2(x) \\ &= \lambda \varphi_x(f_1) + \varphi_x(f_2). \end{aligned}$$

Por outro lado, φ_x é contínua. Tomando $f \in X'$ temos que,

$$|\varphi_x(f)| = |f(x)| .$$

Como $f \in X'$, temos que f é um funcional limitado, assim φ_x é limitado. Sendo assim, $\varphi_x \in X''$.

Lema 2.2.2 *Seja X um espaço vetorial real. A aplicação $J : X \longrightarrow X''$ definida por $J(x) = \varphi_x$, é linear e injetora.*

Demostração: Ver em [3]. □

Observação 2.2.6 *A aplicação $J(x) = \varphi_x$ é chamada de aplicação canônica.*

Definição 2.2.13 (Espaço Reflexivo) *Seja X um espaço de Banach e seja J a aplicação canônica de X em X''. Dizemos que X é reflexivo se $J(X) = X''$.*

Quando o espaço X é reflexivo se identificam os espaços X e X'' por meio do isomorfismo J.

2.2.4 Os Espaços $L^p(I)$

Apresentaremos agora o espaço das funções $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int_I |f(x)|^p \, dx < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Tais espaços são conhecidos como espaços $L^p(I)$, ou como espaço das funções p-integráveis. A notação $L^p(I)$ foi dada devido ao matemático francês *Henri Léon Lebesgue*, que generalizou o conceito de integral de Riemann, introduzindo assim o conceito de medida, e tornando-a uma ferramenta padrão da Análise Real.

Nesta parte, fixamos (X, χ, μ) um espaço de medida e identificamos funções mensuráveis $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são iguais quase sempre, onde μ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Informações sobre espaços mensuráveis, medida de Lebesgue e integral de Lebesgue podem ser encontradas em [8].

Definição 2.2.14 (Espaço $L^1(I)$) *Dizemos que uma função $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-integrável se*

$$\int_I |f| < \infty.$$

Observação 2.2.7 *Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é Lebesgue-integrável escrevemos $f \in L^1(I)$, e possui norma dada por*

$$\|f\|_1 = \int_I |f|$$

Definição 2.2.15 (Espaço $L^p(I)$) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável. Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(I)$ como sendo o espaço das funções reais p-integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(I) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \int_I |f| < \infty \right\},$$

dotado da norma,

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p}$$

Definição 2.2.16 (Espaço $L^\infty(I)$) *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável. Definimos o espaço $L^\infty(I)$ como sendo o espaço das funções reais limitadas, isto é,*

$$L^\infty(I) = \left\{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_I |f| < \infty \right\},$$

dotado da norma,

$$\|f\|_\infty = \sup_I |f|$$

Observação 2.2.8 *Observamos que da definição acima*

$$\sup_I |f| = \inf_I \{ c \in \mathbb{R} : |f(x)| < c \quad q.t.p. \}$$

Observação 2.2.9 *Se $f \in L^{\infty}(I)$, então $|f(x)| \leq \|f\|_{L^{\infty}(I)}$, em quase todo ponto de I.*

Teorema 2.2.6 (Desigualdade de Holder) *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e as funções $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ onde q é o conjugado de p, com $1 \leq p \leq \infty$. Então a função $fg \in L^1(I)$ e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostração: Ver em [2], página 56. □

Exemplo 2.2.6 *Suponha que $z_n \to z_0$ em $C(\overline{I})$, onde $I =]0,1[$ e seja $h \in L^2(I)$, então*

$$\int_0^1 h(x) z_n(x) dx \longrightarrow \int_0^1 h(x) z_0(x) dx$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 h(x) z_{n_j}(x) dx - \int_0^1 h(x) z_0(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 h(x)(z_{n_j}(x) - z_0(x)) dx \right| \\
&\leq \max \left\{ \left| z_{n_j}(x) - z_0(x) \right| : x \in I \right\} \int_0^1 |h(x)|\, dx \\
&= \max \left\{ \left| z_{n_j}(x) - z_0(x) \right| : x \in I \right\} \int_0^1 |h(x) \cdot 1|\, dx \\
&\leq \max \left\{ \left| z_{n_j}(x) - z_0(x) \right| : x \in I \right\} \|h\|_{L^2(I)} \\
&= \left\| z_{n_j} - z_0 \right\|_{C(\overline{I})} \|h\|_{L^2(I)} \to 0.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.7 *O espaço $L^p(I)$ é:*

(i) um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$

(ii) um espaço reflexivo para todo $1 < p < \infty$.

Demostração: Ver em [2], pág. 59. □

O resultado a seguir, conhecido como Lema de Fatou, estabelece uma desigualdade relativa a integral do limite inferior(superior) de uma seqüência de funções para o limite inferior(superior) de integrais destas funções. Este Lema é nomeado em homenagem ao matemático francês *Pierre Fatou* (1878-1929).

Teorema 2.2.8 (Lema de Fatou) *Seja $(x_n) \subset L^1(I)$. Então:*

(i) Se $x_n \geq v$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma $v \in L^1(I)$, então

$$\int \liminf_{n \to +\infty} x_n dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int x_n dx$$

(ii) Se $x_n \leq w$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma $w \in L^1(I)$, então

$$\int \limsup_{n \to +\infty} x_n dx \geq \limsup_{n \to +\infty} \int x_n dx$$

Demostração: Ver em [8], página 85. □

2.2.5 Espaços $W^{1,p}(I)$

Apresentaremos agora, os espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$, que foram estudados pelo matemático *Sergei Sobolev* na metade da década de trinta, e que até hoje vêm sendo de grande importância no desenvolvimento das Equações Diferencias. Veremos também que se uma função pertence ao espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$, então ela é $L^p(I)$ e sua derivada no sentido fraco também é $L^p(I)$.

Definição 2.2.17 *O Espaço de Sobolev* $W^{1,p}(I), \quad 1 \leq p \leq \infty$ *se define por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \quad \exists g \in L^p(I) | \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

O exemplo abaixo mostra uma função $u \in W^{1,p}(]-1,1[)$. Nele verifica-se que a função v é a derivada no sentido fraco de u.

Exemplo 2.2.7 *A função* $u :]-1,1[\to \mathbb{R}$ *definida por* $u(x) = \dfrac{1}{2}[|x| + x]$ *está em* $W^{1,p}(]-1,1[)$, *para todo* $1 \leq p \leq \infty$.

Com efeito, u é definida por:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

para mostrar que $u \in W^{1,p}(I)$, devemos mostrar que

(i) $u \in L^p(I)$

(ii) $\exists v \in L^p(I)$ tal que $\displaystyle\int_I u\varphi' = -\int_I v\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$.

Prova de (i): De fato,

$$\begin{aligned} \int_I |u(x)|^p \, dx &= \int_{-1}^1 |u(x)|^p \, dx \\ &= \int_{-1}^0 |u(x)|^p \, dx + \int_0^1 |u(x)|^p \, dx \\ &= \int_0^1 x^p dx \\ &= \frac{1}{p+1} < \infty. \end{aligned}$$

Agora, para $p = +\infty$, $\displaystyle\sup_{]-1,1[} |u| = 1 < \infty$.

Prova de (ii):

$$
\begin{aligned}
\int_I u(x)\varphi' dx &= \int_{-1}^{1} u(x)\varphi' dx \\
&= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi' dx + \int_{0}^{-1} u(x)\varphi' dx \\
&= \int_{0}^{1} x\varphi' dx \\
&= \int_{0}^{1} [(x\varphi)' - \varphi] \\
&= -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi dx,
\end{aligned}
$$

onde

$$
v(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \end{cases}
$$

a qual pertence ao espaço $L^p(]-1,1[)$, para $1 \leq p \leq \infty$.
Notação Quando $p = 2$ denotamos $W^{1,p}(I)$ por $H^1(I)$.

Observação 2.2.10 *O espaço $W^{1,p}(I)$ está munido da seguinte norma,*

$$
\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \left\|u'\right\|_{L^p(I)}.
$$

Observação 2.2.11 *O espaço $H^1(I)$ com o produto interno definido por*

$$
\langle u, v\rangle_{H^1} = \langle u, v\rangle_{L^2} + \left\langle u', v'\right\rangle_{L^2},
$$

é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.2.2 *O espaço $W^{1,p}(I)$ é:*

(i) *um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$*

(ii) *um espaço reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demostração: Mostraremos o ítem (i), sendo que a demonstração de (ii) pode ser encontrada em [2]. Consideremos (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(I)$. Assim, para $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\forall m, n > \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} < \epsilon.
$$

Como,

$$
\|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} = \|u_m - u_n\|_{L^p(I)} + \left\|(u_m - u_n)'\right\|_{L^p(I)},
$$

temos,

$$
\|u_m - u_n\|_{L^p(I)} \leq \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} < \epsilon
$$

e

$$\left\|(u_m - u_n)'\right\|_{L^p(I)} \leq \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} < \epsilon,$$

assim, (u_n) e (u_n') são sequências de Cauchy em $L^p(I)$. Logo temos,

$$u_n \to u \in L^p(I) \quad \text{e} \quad u_n' \to g \in L^p(I).$$

Utilizando a desigualdade de Holder temos,

$$\begin{aligned} \left|\int_I u_n\varphi' - \int_I u\varphi'\right| &= \left|\int_I (u_n - u)\varphi'\right| \\ &\leq \int_I \left|(u_n - u)\varphi'\right| \\ &\leq \|(u_n - u)\|_p \left\|\varphi'\right\|_q \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_I u_n\varphi' \to \int_I u\varphi'.$$

Por outro lado, sendo $\displaystyle\int_I u_n\varphi' = -\int u_n'\varphi$, para todo n, resulta após a passagem ao limite que

$$\int_I u\varphi' = -\int u'\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1.$$

Portanto, $u \in W^{1,p}(I)$. □

Um importante resultados da teoria dos espaços de Sobolev, é o que segue abaixo

Teorema 2.2.9 *Existe uma constante C(dependente apenas de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}\,, \quad \forall 1 \leq p \leq \infty,$$

ou seja, $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$, com inclusão contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$. Além disso quando I é limitado temos:

(i) a imersão $W^{1,p}(I) \subset\subset C(\overline{I})$ é compacta para $1 < p \leq \infty$

(ii) a imersão $W^{1,1}(I) \subset\subset L^q(I)$ é compacta para $1 \leq p < \infty$

Demostração: Ver em [2], página 129. □

Outra importante caracterização para os estes espaços, é a de que cada função neste espaço possui um representante contínuo, como enunciaremos na seguinte Proposição.

Proposição 2.2.3 (Representante Contínuo) *Seja $u \in (I)$, então existe uma função $w \in C(\overline{I})$, tal que $u = w$ q.t.p. de I e*

$$w(x) - w(y) = \int_y^x u'(t)dt, \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demostração: Ver em [2], página 122.

2.2.6 Convergência fraca

Definição 2.2.18 (Convergência forte) *Uma sequência (x_n) em um espaço normado X é dita fortemente convergente se existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Observação 2.2.12 *Na a definição acima x é chamado de limite forte de (x_n), e dizemos que a sequência (x_n) converge fortemente para x.*

Definição 2.2.19 (Convergência fraca) *Uma sequência (x_n) em um espaço normado X é dita fracamente convergente se existe $x \in X$ tal que para cada $f \in X'$,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Observação 2.2.13 *Quando uma sequência (x_n) converge fracamente para x denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, sendo que x é o limite fraco de x_n.*

Exemplo 2.2.8 *Se $x_n \rightharpoonup x_0$ em $H^1(I)$, então $\int_0^1 x_n'(x)v'(x)dx \to \int_0^1 x_0'(x)v'(x)dx$ para toda $v \in H^1(I)$.*

De fato, temos que $x_n \rightharpoonup x_0$ em $H^1(I)$, ou seja, para todo funcional $\phi \in (H^1(I))'$, temos que

$$\phi(x_n) \longrightarrow \phi(x_0).$$

Como o funcional $\varphi : H^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$\varphi(w) = \int_0^1 w'(x)v'(x)dx,$$

é linear e contínuo, para toda $v \in H^1(I)$, temos que $\varphi \in (H^1(I))'$, sendo assim,

$$\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x_0).$$

2.2.7 Operadores Compactos

Os operadores lineares compactos são definidos como segue,

Definição 2.2.20 (Operador linear compacto) *Sejam X e Y espaços normados. Um operador linear $T : X \to Y$ é dito compacto se T é linear e se para cada subconjunto limitado $M \subset X$, a imagem $T(M)$ é relativamente compacta, ou seja, o fecho $\overline{T(M)}$ é compacto.*

Teorema 2.2.10 (Convergência Fraca) *Sejam X e Y espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear compacto. Suponhamos que $(x_n) \subset X$ converge fracamente, digamos, $x_n \rightharpoonup x$. Então $T(x_n)$ converge fortemente em Y e possui limite $y = T(x)$.*

Demostração: Ver em [6], página 410. □

O seguinte teorema nos garante que se tivermos uma sequência limitada definida em espaços de Banach reflexivos, então esta possui uma subsequência fracamente convergente, a demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10].

Teorema 2.2.11 (Eberlian-Smulian) *Um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demostração: Ver em [10], página 141. □

Antes de apresentarmos a caracterização variacional do problema (P) vamos generalizar os conceitos de derivada e derivada direcional do cálculo de várias variáveis. As derivadas de Gâteaux e de Fréchet servem a esse propósito.

2.2.8 Derivada de Gâteaux e de Fréchet

Definição 2.2.21 *Sejam X e Y espaços vetoriais e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação. Dizemos que f é Gâteaux-diferenciável em $x \in X$ na direção de $\rho \in X$, se existe o limite*

$$\left\langle f'(x), \rho \right\rangle = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\rho) - f(x)}{h} \tag{2.10}$$

Dizemos que f é Gâteaux-diferenciável em $x \in X$, se f é Gâteaux-diferenciável em toda direção. Neste caso, o operador $f' : X \longrightarrow Y$, que assume o vetor $\langle f'(x), \rho \rangle$, é chamado de derivada de Gâteaux em x.

Observação 2.2.14 *Se f é Gâteaux-diferenciável em $x \in X$, e tem derivada de Gâteaux contínua então dizemos que f é de classe $C^1(X, \mathbb{R})$*

A derivada de Gâteaux tem grande importância na determinação de máximos e mínimos de funcionais. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um mínimo ou um máximo em $x \in X$, e $f'(x)$ existe, então $f'(x) = 0$.

Exemplo 2.2.9 *Seja função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq 0$ e $f(0, 0) = 0$.*

Vamos verificar para quais pontos do $\mathbb{R}^2$, $\langle f'(0), \rho \rangle$ existe. Consideremos $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\langle f'(0), \rho \right\rangle &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h\rho) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(h\rho_1, h\rho_2) - 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\rho_1 \rho_2}{h(\rho_1^2 + \rho_2^2)}.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que $\langle f'(0), \rho \rangle$ existe, se e somente se, $\rho = (\rho_1, 0)$ ou $\rho = (0, \rho_1)$.

Definição 2.2.22 (derivada de Fréchet) *Sejam X e Y espaços vetoriais normados e a aplicação $F : X \longrightarrow Y$. Dizemos que F é Fréchet-diferenciável em $x \in X$ se existe um operador linear e contínuo*

$$\begin{aligned}
F' : X &\longrightarrow Y \\
h &\mapsto F'(h),
\end{aligned}$$

tal que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.11}$$

Neste caso, $F'(x)h$ é chamado de diferencial de Fréchet de F em x com acréscimo h.

Exemplo 2.2.10 *A função $f : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1x_2 + x_1^2$, é Fréchet-diferenciável e tem diferencial dado por $F'(x)h = (2x_1 + x_2)h_1 + x_1h_2$.*

2.3 Caracterização variacional do problema (P)

Consideremos o problema (P) dado por:

$$\text{(P)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -u'' & = & f(x,u), \quad x \in I =]0,1[\\ u'(0) & = & u'(1) = 0 \end{array} \right.$$

onde $f : \overline{I} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Dizemos que $u \in C^2(\overline{I})$ é uma *solução clássica* do problema (P) se ela satisfaz as condições de (P) no sentido usual. Deste modo, consideremos uma função $u \in C^2(\overline{I})$ solução clássica de (P). Multiplicando a equação em (P) por uma função $v \in C^1(I)$, temos

$$-u'' \cdot v = f \cdot v. \tag{2.12}$$

Integrando por partes a expressão acima temos que:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 (-u'' \cdot v)\, dx & = & \displaystyle\int_0^1 [u' \cdot v' - (u' \cdot v)']\, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 (u' \cdot v')\, dx - [u'(1)v(1) - u'(0)v(0)] \\ & = & \displaystyle\int_0^1 u' \cdot v'\, dx \quad \text{pois } u \text{ é solução clássica de } (P). \end{array}$$

Daí

$$\int_0^1 u' \cdot v'\, dx = \int_0^1 f \cdot v\, dx. \tag{2.13}$$

Assim, se $u \in C^2(I)$ é uma solução de (P), ela satisfaz a equação integral (2.13). Observemos que para funções $u, v \in L^2(I)$ com $u', v' \in L^2(I)$ a equação (2.13) é satisfeita. Assim, o espaço natural das soluções de (P) é o espaço de Sobolev $H^1(I)$. Dizemos então que a função $u \in H^1(I)$ é uma *solução fraca* para o problema (P) se

$$\int_0^1 u' \cdot v'\, dx = \int_0^1 f \cdot v\, dx, \qquad \forall v \in H^1(I) \tag{2.14}$$

O funcional de *Euler-Lagrange* $\Phi : H^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (P) é definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u')^2\, dx - \int_0^1 F(x,u)\, dx \tag{2.15}$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\, dt$.

Observando que as funções $u', v'u, v$ pertencerem ao espaço $H^1(I)$ e aplicando a desigualdade de Holder, ver Teorema 2.2.6, a expressão em (2.14) está bem definida. Já em (2.15), a boa definição do funcional Φ se deve pelo fato de que u' é de quadarado integrável em $[0,1]$ e que F é contínua no compacto $[0,1]$.

Afirmação: O funcional Φ é de classe C^1 e sua derivada é dada por

$$\big\langle \Phi'(u), v \big\rangle = \int_0^1 u' \cdot v' \, dx - \int_0^1 f(x,u)\, v \, dx, \qquad \forall u, v \in H^1(I). \tag{2.16}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\big\langle \Phi'(u), v \big\rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 ((u+tv)')^2 dx - \int_0^1 F(x, u+tv) dx}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \int_0^1 u'v' dx + \frac{t}{2}\int_0^1 (v')^2 dx - \int_0^1 \frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} dx \\
&= \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f(x,u) v dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\big|\big\langle \Phi'(u), v \big\rangle\big| &= \left| \int_0^1 u'v' dx - \int_0^1 f(x,u) v dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 u'v' dx \right| + \left| \int_0^1 f(x,u) v dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |u'v'| \, dx + \int_0^1 |f(x,u)v| \, dx \\
&\leq \|u'\|_2 \|v'\|_2 + \|f\|_2 \|v\|_2 < \infty.
\end{aligned}$$

Vemos então, que a derivada de Gâteaux é contínua em $H^1(I)$, sendo assim $\Phi \in C^1(H, \mathbb{R})$.

Observemos que os pontos críticos de Φ são funções $u \in H^1(I)$ tais que $\Phi'(u) = 0$, ou seja, são funções que satisfazem (2.16).

Capítulo 3

Geometria do Funcional de Euler-Lagrange

Neste capítulo mostraremos que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (P) satisfaz as condições I_1, I_2 e I_3 do Teorema do Passo da Montanha de Silva.

Teorema 3.0.1 (de Silva) *Seja $H = X_1 \oplus X_2$, um espaço de Banach real , onde X_1 é um subespaço de dimensão finita. Supondo que o funcional $\Phi \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaça as condições:*

- (I_1) $\Phi(u) \leq 0, \forall u \in X_1$.
- (I_2) *Existe $\rho > 0$ tal que $\Phi(u) \geq 0$, para todo $u \in \partial B_\rho(0) \cap X_2$.*
- (I_3) *Existe $e \in X_2 - \{0\}$ e $\beta \geq 0$ tal que $\Phi(u) \leq \beta$ para toda $u \in X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$.*

Além disso, se Φ satisfaz a condição de Palais-Smale (P.S.), então Φ possui ao menos um ponto crítico em H diferente de zero.

Para aplicarmos o Teorema acima, dividimos o espaço $H^1(I)$ numa soma direta entre o espaço X_1, que para nosso problema é o espaço das funções constantes, ou seja, $X_1 = \langle 1 \rangle$ e seu complemento ortogonal X_2, que é o espaço das funções u em $H^1(I)$ tais que $\langle u, 1 \rangle = 0$, ou seja, $\displaystyle\int_0^1 u dx = 0$. Assim, temos que $X_2 = \left\{ u \in H^1(I) : \displaystyle\int_0^1 u dx = 0 \right\}$.

Para provarmos que o funcional Φ satisfaz o teorema 3.0.1, prescisamos verificar os seguintes resultados.

Lema 3.0.1 *Suponhamos a condição (f_2). Então existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$f(x, s) \geq K s^{\frac{1}{\theta} - 1}, \quad \forall s \geq s_0 > 0, \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Demostração:

Da condição (f_2), existem $s_0 > 0$ e $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ tais que

$$0 < F(x, s) \leq \theta s f(x, s), \forall x \in I, \quad \forall s \geq s_0 > 0.$$

Logo temos,

$$\frac{1}{s} \leq \theta \frac{f(x, s)}{F(x, s)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \ln s \leq \theta \frac{d}{ds} \ln F(x, s)$$

Assim,

$$\int_{s_0}^{s} (\ln t)'\,dt \leq \int_{s_0}^{s} \theta\,(\ln F(x,t))'\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln s - \ln s_0 \leq \theta\,(\ln F(x,s) - \ln F(x,s_0))\,,$$

ou seja,

$$\frac{s}{s_0} \leq \left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_0)}\right)^{\theta}$$

e portanto,

$$\frac{F(x,s_0)}{s_0^{\frac{1}{\theta}}} s^{\frac{1}{\theta}} \leq F(x,s). \tag{3.1}$$

Além disso, temos que o retângulo $R = [0,1] \times [0,s_0]$ é um compacto do $\mathbb{R}^2$, e como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass (Corolário 2.2.1), f atinge seus extremos em R. Seja então $A_0 = \min\{f(x,s) : (x,s) \in R\}$, então,

$$A_0 \leq f(x,s), \quad \forall (x,s) \in R,$$

sendo assim,

$$A_0 s_0 = \int_0^{s_0} A_0 dt \leq \int_0^{s_0} f(x,t)dt = F(x,s_0), \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Mas de (3.1) temos

$$K_F s^{\frac{1}{\theta}} \leq F(x,s) \leq \theta s f(x,s), \quad \forall s \geq s_0 > 0,$$

onde $\mathrm{K}_F = A_0 s_0^{1-\frac{1}{\theta}}$.
Assim,

$$K s^{\frac{1}{\theta}-1} \leq f(x,s), \quad \forall s \geq s_0 > 0, \tag{3.2}$$

onde $K = \dfrac{K_F}{\theta}$. □

Observação 3.0.1 *A função f é superlinear em $+\infty$, ou seja,*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty$$

Com efeito, dividindo (3.2) por s temos,

$$K s^{\frac{1}{\theta}-2} \leq \frac{f(x,s)}{s}, \quad \forall s \geq s_0 > 0.$$

Como $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, temos que $\dfrac{1}{\theta} - 2 > 0$. Então,

$$+\infty = \lim_{s\to+\infty} Ks^{\frac{1}{\theta}-2} \leq \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s},$$

e logo

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} = +\infty.$$

Para mostrarmos o próximo resultado, precisaremos da afirmação abaixo:

Afirmação $\lim\limits_{s\longrightarrow-\infty} F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2 = -\infty.$

Com efeito, da condição (f_1), existe $\overline{s} < 0$ tal que

$$\begin{aligned} -\epsilon &< f(x,s) - \lambda s < \epsilon, \\ -\epsilon + \lambda s &< f(x,s) < \epsilon + \lambda s, \quad \forall s < \overline{s} < 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Integramos então a desigualdade (3.3) em $[s, \overline{s}]$ temos

$$-\epsilon(s-\overline{s}) + \frac{\lambda}{2}(s^2 - \overline{s}^2) < \int_{\overline{s}}^{s} f(x,t)dt < \epsilon(s-\overline{s}) + \frac{\lambda}{2}(s^2 - \overline{s}^2).$$

Como

$$F(x,s) - \int_0^{\overline{s}} f(x,t)dt = \int_{\overline{s}}^{s} f(x,t)dt, \quad s < \overline{s},$$

e, pela condição (f_3), $-\int_0^{\overline{s}} f(x,t)dt > 0$ em $[\overline{s}, 0]$, temos,

$$F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2 < F(x,s) - \int_0^{\overline{s}} f(x,t)dt - \frac{\lambda}{2}s^2 < \epsilon(s-\overline{s}) - \frac{\lambda}{2}\overline{s}^2.$$

Portanto, $F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2 \longrightarrow -\infty$, quando $s \longrightarrow -\infty$.

Proposição 3.0.1 *Supondo a condição (f_1) e (f_3). Então existe uma constante $K_2 > 0$ tal que*

$$\left| F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2 \right| \leq K_2 |s|, \quad \forall s \leq s_1.$$

Demostração: Munidos da afirmação acima e utilizando a Regra de L'Hospital temos,

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2}{s} = \lim_{s\to-\infty} f(x,s) - \lambda s = 0,$$

Então para todo $\epsilon > 0$, existe $s' < 0$ tal que para todo $s < s'$, temos

$$\left| \frac{F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2}{s} \right| < \epsilon.$$

No intervalo $[s', s_1]$, a função f é contínua, sendo assim, F é contínua em $[s', s_1]$. Seja

$$K_2 = \max\left\{ \max_{x\in[0,1], s\in[s',s_1]} |F|, \min_{x\in[0,1], s\in[s',s_1]} |F| \right\} > 0, .$$

então

$$\left| \frac{F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2}{s} \right| < \epsilon < K_2.$$

Logo,

$$\left| F(x,s) - \frac{\lambda}{2}s^2 \right| < K_2 |s|, \quad \forall s < s_1.$$

□

Em [5] De Figueiredo e Ruf provam que

$$\frac{\pi^2}{4} = \min\left\{ \frac{\displaystyle\int_o^1 (u')^2 dx}{\displaystyle\int_o^1 u^2 dx + \|u\|_\infty^2} : u \in X_2 - \{0\} \right\}. \tag{3.4}$$

Munidos deste resultado, iremos provar que as duas normas definidas a seguir são equivalentes:

Proposição 3.0.2 *As normas* $\|u\|_{H^1(I)}$ *e* $\|u\| = \left(\int_0^1 (u')^2 dx \right)^{1/2}$ *são equivalentes para todo* $u \in X_2$.

Demostração: Seja $u \in H^1(I)$, então vamos provar que existem constantes positivas k_1, k_2, tais que

$$k_1 \|u\| \leq \|u\|_{H^1(I)} \leq k_2 \|u\|, \quad \forall u \in X_2.$$

Para toda $u \in H^1(I)$, temos

$$\|u'\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2.$$

Isso implica que

$$\|u\| \leq \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{H^1(I)}.$$

Agora consideremos $u \in X_2 - \{0\}$. De (3.4) temos que

$$\frac{\pi^2}{4} \leq \frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2 + \|u\|_\infty^2},$$

ou seja,

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\left\|u'\right\|_2^2 - \|u\|_\infty^2 \leq \frac{4}{\pi^2}\left\|u'\right\|_2^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^1(I)}^2 &= \|u\|_2^2 + \left\|u'\right\|_2^2 \\
&\leq \frac{4}{\pi^2}\left\|u'\right\|_2^2 + \left\|u'\right\|_2^2 \\
&= \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right)\left\|u'\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|.$$

Tomando $k_1 = 1$ e $k_2 = \left(\frac{4}{\pi^2} + 1\right)^{1/2}$, temos o resultado.

□

Teorema 3.0.2 *Seja $I =]0,1[$, e consideremos as condições (f_1) e (f_2). Então o funcional dado por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x,u)dx, u \in H^1(0,1), \tag{3.5}$$

satisfaz (I_3), se e somente se, $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$.

Demostração: ($\Leftarrow$)Suponhamos que $\lambda > \frac{\pi^2}{4}$. A função definida por

$$e(x) = \frac{2}{\pi} - sen\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad x \in [0,1].$$

é contínua, assim $e \in H^1(I)$.
Como

$$\int_0^1 e(x)dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{\pi} - sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] dx = 0,$$

temos que $e \in X_2 - \{0\}$.
Por outro lado, como $e'(x) = -\frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}\right)x$, temos

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 (e'(x))^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 (e(x))^2 dx + \|e\|_\infty^2} = \frac{\frac{\pi^2}{8}}{-\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{4} < \lambda.$$

assim o mínimo em (3.4) é atingido para a função e.
Consideremos o espaço

$$X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e = \left\{k + te : k \in X_1, \quad t \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Nosso objetivo é mostrar que o funcional Φ é limitado superiormente em $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$. Logo

$$\begin{aligned}
\Phi(k+te) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(k+te(x))'\right]^2 dx - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(te'(x)\right)^2 dx - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx \\
&= \frac{1}{2}t^2 \int_0^1 (e'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Estudaremos então o termo $\displaystyle\int_0^1 F(x, k+te(x))dx$ da expressão acima.
Seja $s_1 > s_0$. Da condição (f_2), temos que existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \frac{\lambda}{2}s^2 + K_1 s^{1/\theta}, \quad \forall s \geq s_1.$$

Com isso, consideramos os seguintes subconjuntos de I:

$$E_1 = \{x \in I : k + te(x) > s_1\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{x \in I : k + te(x) \leq s_1\}.$$

Observe que $E_1 \cup E_2 = I$ e que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
Considerando a Proposição 3.0.1, temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x, k+te(x))dx &= \int_{E_1} F(x, k+te(x))dx + \int_{E_2} F(x, k+te(x))dx \\
&\geq \frac{\lambda}{2}\int_{E_1} (k+te(x))^2 dx + K_1 \int_{E_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\int_{E_2} (k+te(x))^2 dx - K_2 \int_{E_2} |k+te(x)|\, dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_I (k+te(x))^2 dx + K_1 \int_{E_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx \\
&\quad - K_2 \int_{E_2} |k+te(x)|\, dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\langle k+te, k+te\rangle + K_1 \int_{E_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx \\
&\quad - K_2 \int_{E_2} |k+te(x)|\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2}\left\{\langle k,k\rangle + 2t\,\langle k,e\rangle + t^2\,\langle e,e\rangle\right\}\\
&\quad +K_1\int_{E_1}(k+te(x))^{\frac{1}{\theta}}dx - K_2\int_{E_2}|k+te(x)|\,dx. \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Como $k \in X_1$ e $e \in X_2 - \{0\} = X_1^{\perp} - \{0\}$, então $\langle k,e\rangle = 0$. De (3.7) vemos que,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 F(x,k+te(x))dx &\geq \frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{\lambda}{2}t^2\int_I (e(x))^2dx + K_1\int_{E_1}(k+te(x))^{\frac{1}{\theta}}dx\\
&\quad -K_2\int_{E_2}|k+te(x)|\,dx\\
&\geq \frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{\lambda}{2}t^2\int_I (e(x))^2dx + K_1\int_{E_1}(k+te(x))^{\frac{1}{\theta}}dx\\
&\quad -K_2\left(t\int_I |e(x)|\,dx + |k|\right). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.8),

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 F(x,k+te(x))dx &\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 - \frac{\lambda}{2}t^2\int_I (e(x))^2dx - K_1\int_{E_1}(k+te(x))^{\frac{1}{\theta}}dx\\
&\quad + K_2\left(t\int_I |e(x)|\,dx + |k|\right). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Segue então de (3.6) e (3.9) que

$$
\begin{aligned}
\Phi(k+te) &\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{1}{2}t^2\left(\int_0^1 (e'(x))^2dx - \lambda\int_0^1 (e(x))^2dx\right)\\
&\quad + K_2\left(t\int_I |e(x)|\,dx + |k|\right) - K_1\int_{E_1}(k+te(x))^{\frac{1}{\theta}}dx. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

De (3.4), temos que

$$
\frac{\pi^2}{4} < \frac{\displaystyle\int_0^1 (e'(x))^2dx}{\displaystyle\int_0^1 (e(x))^2dx}.
$$

Como $\dfrac{\pi^2}{4} < \lambda$, para continuar a demonstração iremos considerar dois casos:

(1^o) $\quad \dfrac{\displaystyle\int_0^1 (e'(x))^2dx}{\displaystyle\int_0^1 (e(x))^2dx} < \lambda,$

$$(2^o) \qquad \frac{\displaystyle\int_0^1 (e'(x))^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 (e(x))^2 dx} \geq \lambda.$$

Do (1^o) caso temos que,

$$\int_0^1 (e'(x))^2 dx < \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (e'(x))^2 - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 < 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Phi(k+te) \quad &\leq \quad \underbrace{-\frac{\lambda}{2}k^2}_{<0} + \frac{1}{2}t^2 \underbrace{\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right)}_{<0} \\ &\quad + K_2 \left(t \int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) \underbrace{- K_1 \int_{E_1} (k + te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx}_{<0}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Phi(k+te) \leq K_2 \left(t \int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) \leq \beta. \tag{3.11}$$

Tomemos então $\alpha \in (0, \|e\|_\infty)$ suficientemente próximo de $\|e\|_\infty$, tal que

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 (e'(x))^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 (e(x))^2 dx + \alpha^2} < \lambda. \tag{3.12}$$

Agora consideremos o (2^o) caso. Como $\alpha \in (0, \|e\|_\infty)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $\alpha = e(x_0)$. Então

$$k + t\alpha = k + te(x_0)t.$$

Como $x_0 \in I = E_1 \cup E_2$, e esta união é disjunta, temos que $x_0 \in E_1$, ou $x_0 \in E_2$. Logo,

(i) Se $x_0 \in E_2$, então $k + \alpha t \leq s_1$
Daí temos:

$$t \leq \frac{s_1 - k}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad t^2 \leq \frac{(s_1-k)^2}{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}t^2 \leq \frac{(s_1-k)^2}{2\alpha^2} = \frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2} + \frac{k^2}{2\alpha^2}.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\Phi(k+te) &\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2} + \frac{k^2}{2\alpha^2}\right)\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(t\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) - K_1 \int_{E_1} (k+te(x))^{1/\theta} dx \\
&\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{k^2}{2\alpha^2}\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2}\right)\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(\frac{s_1 - k}{\alpha}\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) - K_1 \int_{E_1} (k+te(x))^{1/\theta} dx \\
&= -\frac{k^2}{2\alpha^2}\left[\alpha^2\lambda + \lambda\int_0^1 (e(x))^2 dx - \int_0^1 (e'(x))^2 dx\right] \\
&\quad + \left(\frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2}\right)\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(\frac{s_1 - k}{\alpha}\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) \\
&= -\frac{k^2}{2\alpha^2}\left(\lambda\left(\int_0^1 (e(x))^2 dx + \alpha^2\right) - \int_0^1 (e'(x))^2 dx\right) \\
&\quad + \left(\frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2}\right)\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(\frac{s_1 - k}{\alpha}\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Mas pela escolha de α em (3.12) , temos que:

$$
\int_0^1 (e'(x))^2 dx < \lambda\left(\int_0^1 (e(x))^2 dx + \alpha^2\right).
$$

Usando então que $\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx > 0$ e que $\frac{s_1}{\alpha^2}k < 0$, concluímos que,

$$
\begin{aligned}
\Phi(k+te) &\leq \left(\frac{s_1^2}{2\alpha^2} - \frac{s_1 k}{\alpha^2}\right)\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(\frac{s_1 - k}{\alpha}\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) \\
&\leq \frac{s_1^2}{2\alpha^2}\left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx\right) \\
&\quad + K_2\left(\frac{s_1 - k}{\alpha}\int_I |e(x)|\, dx + |k|\right) \leq \beta. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

(ii) Se $x_0 \in E_1$ então $k + \alpha t > s_1$.
Consideremos o conjunto $I_1 = \{x \in I : e(x) > \alpha\}$. Então temos que,

$$
k + te(x) > k + t\alpha > s_1 > 0, \quad \forall x \in I_1.
$$

Assim,

$$\int_{I_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx > \int_{I_1} (k+t\alpha)^{\frac{1}{\theta}} dx = (k+t\alpha)^{\frac{1}{\theta}} \int_{I_1} dx = (k+t\alpha)^{\frac{1}{\theta}} |I_1|. \quad (3.15)$$

Por outro lado, se $x \in E_1 - I_1$, então $x \in E_1$ e $x \notin I_1$, ou seja, $k+te(x) > s_1$ e $e(x) \leq \alpha$, logo

$$s_1 < k+te(x) \leq k+t\alpha, \quad \forall x \in E_1 - I_1$$

donde segue que,

$$\int_{E_1-I_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx > 0.$$

Usando (3.15), temos que

$$\begin{aligned} \int_{E_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx &= \int_{I_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx + \int_{E_1-I_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx > \int_{I_1} (k+te(x))^{\frac{1}{\theta}} dx \\ &> (k+t\alpha)^{\frac{1}{\theta}} |I_1|, \end{aligned}$$

de (3.10) temos,

$$\begin{aligned} \Phi(k+te) &\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{1}{2}t^2 \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) \\ &\quad + K_2 \left(t \int_I |e(x)|\, dx + |k| \right) - K_1 (k+t\alpha)^{\frac{1}{\theta}} |I_1|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Fazendo $s = k + \alpha t > s_1$, temos $t = \dfrac{s-k}{\alpha}$, e aplicando em (3.16) temos,

$$\begin{aligned} \Phi(k+te) &\leq -\frac{\lambda}{2}k^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{s-k}{\alpha}\right)^2 \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) \\ &\quad + K_2 \left(\frac{s-k}{\alpha} \int_I |e(x)|\, dx + |k| \right) - K_1 (s)^{\frac{1}{\theta}} |I_1| \\ &= \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) \frac{s^2}{2\alpha^2} \\ &\quad + \left[-\frac{k}{\alpha^2} \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) + \frac{K_2}{\alpha} \int_I |e(x)|\, dx \right] s \\ &\quad -\frac{1}{2}k^2\lambda + \frac{k^2}{2\alpha^2} \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) - \frac{K_2 k}{\alpha} \int_I |e(x)|\, dx \\ &\quad + K_2 |k| - K_1 |I_1| (s)^{\frac{1}{\theta}} \\ &\leq \frac{1}{2\alpha^2} (\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx) s^2 \\ &\quad + \left(\frac{K_2}{\alpha} \int_I |e(x)|\, dx \right) s \\ &\quad + \left(\frac{k^2}{2\alpha^2} \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx - \lambda \int_0^1 (e(x))^2 dx \right) + K_2 |k| \right) \\ &\quad - K_1 |I_1| s^{\frac{1}{\theta}}. \end{aligned}$$

Então temos que

$$\Phi(k+te) \leq A_1 s^2 + A_2 s + A_3 - A_4 s^{\frac{1}{\theta}} \equiv p(s),$$

onde cada $A_i \geq 0$ é uma constante real.
Como $\theta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ e $p(0) = A_3 > 0$ temos,

$$\lim_{s\to+\infty} p(s) = \lim_{s\to+\infty} s^{\frac{1}{\theta}} \left(A_1 \frac{1}{s^{\frac{1}{\theta}-2}} + A_2 \frac{1}{s^{\frac{1}{\theta}-1}} + \frac{A_3}{s^{\frac{1}{\theta}}} - A_4 \right) = -\infty.$$

Então existe $s_* > 0$ tal que $p(s_*) = 0$. Logo $p(s)$ atinge seu máximo no compacto $[0, s_*]$, ou seja $p(s) \leq M_0$, para todo $s > 0$, em particular para $s > s_1$.

Portanto, $\Phi(k+te)$ é limitado superiormente em $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$, e assim Φ satisfaz a condição (I_3).

Reciprocamente, provaremos que o funcional Φ não satisfaz (I_3) se

$$0 < \lambda \leq \frac{\pi^2}{4}. \tag{3.17}$$

Seja $\lambda \in \left(0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ e $e \in X_2 - \{0\}$. Mostraremos que Φ não é limitado superiormente em $X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$. Suponhamos $k + te \in X_1 \oplus \mathbb{R}^+ e$. Logo:

$$\begin{aligned}
\Phi(k+te) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(k+te(x))'\right]^2 dx - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx \\
&= \frac{1}{2}t^2 \int_0^1 (e'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx.
\end{aligned}$$

De (3.4) temos que

$$\frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^1 (e(x))^2 dx + \|e\|_\infty^2\right) \leq \int_0^1 (e'(x))^2 dx,$$

logo,

$$\Phi(k+te) \geq \frac{\pi^2}{8} t^2 \left(\int_0^1 (e(x))^2 dx + \|e\|_\infty^2\right) - \int_0^1 F(x, k+te(x))dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall t > 0. \tag{3.18}$$

Mostraremos que Φ não é limitada superiormente quando $k + t\|e\|_\infty = 1$, para $t > 0$.

Observemos que $[1 - t\|e\|_\infty] + te(x) \leq 1, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \overline{I}$.
De fato,

$$[1 - t\|e\|_\infty] + te(x) = 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty].$$

Como,

$$e(x) \leq |e(x)| \leq \|e\|_\infty,$$

temos que

$$e(x) - \|e\|_\infty \leq 0 \quad \Rightarrow t[e(x) - \|e\|_\infty] \leq 0 \quad \Rightarrow 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty] \leq 1. \tag{3.19}$$

Agora, consideremos $\epsilon \in (0, \lambda)$. Tomando $k + te(x) = (1 - t\|e\|_\infty) + te(x)$, e usando a observação acima e também a condição (f_1), temos que existe uma constante $K_3 > 0$, tal que

$$F(x, 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty]) \leq \frac{\lambda}{2}(1 + t(e(x) - \|e\|_\infty))^2 + \epsilon\,|1 + t(e(x) - \|e\|_\infty)| + K_3$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x, 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty])dx &\leq \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{2}(1 + t(e(x) - \|e\|_\infty))^2\right] dx \\
&\quad + \int_0^1 [\epsilon\,|1 + t(e(x) - \|e\|_\infty)| + K_3]\, dx \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\left\{\int_0^1 dx + \int_0^1 2t(e(x) - \|e\|_\infty)dx\right\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\left\{\int_0^1 t^2(e^2(x) - 2e(x)\,\|e\|_\infty + \|e\|_\infty^2)dx\right\} \\
&\quad + \epsilon\left\{\int_0^1 dx + \int_0^1 |t(e(x) - \|e\|_\infty)|\, dx\right\} + K_3 \\
&= \frac{\lambda}{2}\left\{1 + 2t\left[\int_0^1 e(x)dx - \|e\|_\infty\right]\right\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\left\{t^2\left[\int_0^1 e^2(x)dx - 2\,\|e\|_\infty \int_0^1 e(x)dx + \|e\|_\infty^2\right]\right\} \\
&\quad + \epsilon + \epsilon t \int_0^1 |(e(x) - \|e\|_\infty)|\, dx + K_3 \\
&= \frac{\lambda}{2}\left\{1 + 2t\left[\int_0^1 e(x)dx - \|e\|_\infty\right]\right\} \\
&\quad + \frac{\lambda}{2}\left\{t^2\left[\int_0^1 e^2(x)dx - 2\,\|e\|_\infty \int_0^1 e(x)dx + \|e\|_\infty^2\right]\right\} \\
&\quad + \epsilon - \epsilon t \int_0^1 e(x)dx + \epsilon t\,\|e\|_\infty + K_3 \\
&= \frac{\lambda}{2} - t\,\|e\|_\infty (\lambda - \epsilon) \\
&\quad + \epsilon + \frac{\lambda}{2}t^2\left[\int_0^1 e^2(x)dx + \|e\|_\infty^2\right] + K_3,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

pois $e \in X_2 - \{0\}$.

Logo,

$$-\int_0^1 F(x, 1 + t[e(x) - \|e\|_\infty])dx \geq -\frac{\lambda}{2} + t\,\|e\|_\infty (\lambda - \epsilon) - \epsilon - \frac{\lambda}{2}t^2\left[\int_0^1 e^2(x)dx + \|e\|_\infty^2\right] - K_3.$$

Assim, substituindo essas informações em (3.18), temos

$$\begin{aligned}
\Phi([1-t\,\|e\|_\infty]+te) &\geq \frac{\pi^2}{8}t^2\left(\int_0^1 (e(x))^2dx+\|e\|_\infty^2\right)\\
&\quad -\frac{\lambda}{2}+t\,\|e\|_\infty(\lambda-\epsilon)-\epsilon-\frac{\lambda}{2}t^2\left[\int_0^1 e^2(x)dx+\|e\|_\infty^2\right]-K_3\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\lambda\right)\left(\int_0^1 e^2(x)dx+\|e\|_\infty^2\right)t^2\\
&\quad +\|e\|_\infty(\lambda-\epsilon)\frac{\lambda}{2}t-\epsilon-K_3-\frac{\lambda}{2}.\\
&= C_2t^2+C_1t-C_0, \quad C_0,C_1,C_2>0.
\end{aligned}$$

Como, $\epsilon<\lambda\leq\dfrac{\pi^2}{4}$ e $t>0$, temos,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\Phi([1-t\,\|e\|_\infty]+te)=+\infty.$$

Portanto o funcional Φ é ilimitado. □

No próximo Teorema, provaremos que o funcional Φ satisfaz as condições (I_1) e (I_2).

Teorema 3.0.3 *Supondo as condições (f_3) e (f_4), então o funcional Φ definido em (3.5), satisfaz as condições (I_2) e (I_3) do Teorema (3.0.1).*

Demostração:

(i) **Verificação de** (I_1).
Suponha que $u\in X_1$. Então para todo $x\in I$, temos $u(x)=k$ onde k é constante.

- Se $k\geq 0$, então por (f_3),
$$f(x,k)\geq 0 \quad\Rightarrow F(x,k)=\int_0^k f(x,t)dt\geq 0 \quad\Rightarrow \int_0^1 F(x,k)dx\geq 0.$$
Assim,
$$\Phi(k)=-\int_0^1 F(x,k)dx\leq 0.$$
- Se $k<0$ então por (f_3),
$$f(x,k)<0 \quad\Rightarrow -F(x,k)=-\int_0^k f(x,t)dt=\int_k^0 f(x,t)dt<0.$$
Logo
$$\Phi(k)=-\int_0^1 F(x,k)dx<0.$$

Portanto $\Phi(u)\leq 0$ para todo $u\in X_1$.

(ii) **Verificação de** (I_2)**:**
Vamos provar que existe $\rho>0$, tal que $\Phi(u)\geq 0$ para cada $u\in\partial B_\rho(0)\cap X_2$. Da condição (f_4) temos que $F(x,s)\leq\dfrac{\alpha}{2}s^2$, para todo $s\in(-\epsilon,\epsilon)-\{0\}$.
Por outro lado, lembremos que a caracterização variacional de λ_1 é dada por:

$$\lambda_1=\inf\left\{\frac{\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^2dx}{\displaystyle\int_0^1 (u(x))^2dx}: u\in H^1(I)-\{0\}\right\}. \tag{3.21}$$

Seja $u \in \partial B_\rho(0) \cap X_2$, então,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x,u(x))dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_0^1 (u(x))^2 dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(x))^2 dx - \frac{\alpha}{2\lambda_1}\int_0^1 (u'(x))^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_1}\right)\int_0^1 (u'(x))^2 dx. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Concluímos então que da Proposição 3.0.2, existe uma constante $\rho > 0$, tal que $\Phi(u) \geq 0$, para cada $u \in X_2$ com $\|u\|_{H^1(I)} \geq \rho$.

□

Capítulo 4

Compacidade do Funcional de Euler-Lagrange

4.1 Compacidade do funcional Φ

Definição 4.1.1 (Palais-Smale) *Seja X um espaço de Banach e seja o funcional $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que:*

(i) $\Phi(u_n)$ *é limitado*

(ii) $\Phi'(u_n) \to 0$

possui uma subsequência convergente.

Proposição 4.1.1 *Seja > 0. Supondo que f satisfaz as condições (f_1) e (f_2). Então existe uma constante $K_1 > 0$ tal que*

$$f(x, s) \geq \lambda s - K_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{I}$$

Demostração: Do Lema 3.0.1, existe uma constante $K > 0$ tal que,

$$f(x, s) \geq K s^{\frac{1}{\theta}-1}, \quad \forall s \geq s_0 > 0,$$

onde $\dfrac{1}{\theta} > 2$. Então podemos escolher $s^* > s_0$ tal que

$$f(x, s) > \lambda s, \quad \forall s \geq s^*.$$

Por outro lado, (f_1) implica que, param todo $\epsilon > 0$, e existe $s^{'} < 0$, tal que

$$|f(x, s) - \lambda s| \leq \epsilon, \quad \forall s \leq s^{'}, \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Como f é contínua no compacto $\overline{I} \times [s^{'}, s^*]$, temos que existe uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$|f(x, s) - \lambda s| \leq K_1, \quad \forall s \in (-\infty, s^*], \quad \forall x \in \overline{I}. \tag{4.1}$$

Assim concluimos que

$$f(x, s) \geq \lambda s - K_1, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \overline{I}.$$

□

O próximo teorema mostra que o funcional Φ definido em (2.15) satisfaz a condição $(P.S.)$.

Teorema 4.1.1 *Consideremos* (f_1) *e* (f_2)*. Então o funcional* Φ *definido em (2.15) satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demostração: Seja $(u_n) \subset H^1(I)$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^1 (u_n'(x))^2 dx - \int_0^1 F(x, u_n(x)) dx \right| \leq C \tag{4.2}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \Phi'(u_n), v \right\rangle \right| = \left| \int_0^1 u_n'(x) v'(x) dx - \int_0^1 f(x, u_n(x)) v(x) dx \right| &\leq \underbrace{\left\| \Phi'(u_n) \right\|}_{\epsilon_n} \|v\|_{H^1(I)} \\ &= \epsilon_n \|v\|_{H^1(I)}, \quad \forall v \in H^1(I) \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $C > 0$ é uma constante positiva e (ϵ_n) é uma sequência de números positivos que converge para zero. Para mostrarmos que (u_n) possui uma subsequência convergente vamos mostrar que (u_n) é limitada. Suponhamos por absurdo que (u_n) não seja limitada. Assim podemos extrair uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) tal que

$$\lim_{j \to +\infty} \left\| u_{n_j} \right\| = +\infty.$$

Então sem perda de generalidade assuminos que $\left\| u_{n_j} \right\| \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos então a sequência $(z_n) \subset H^1(I)$ por

$$z_n = \frac{u_{n_j}}{\left\| u_{n_j} \right\|}.$$

Logo temos que a sequência (z_n) é unitária, sendo assim, limitada em $H^1(I)$. Como o espaço $H^1(I)$ é de Banach Reflexivo, pelo Teorema de Eberlian-Smulian, temos que (z_n) possui uma subsequência (z_{n_j}) fracamente convergente em $H^1(I)$, ou seja,

$$z_{n_j} \rightharpoonup z_0, \quad \text{em} \quad H^1(I). \tag{4.4}$$

Como a imersão de Sobolev $H^1(I) \subset\subset C(\overline{I})$ é compacta, temos

$$z_{n_j} \xrightarrow{C(\overline{I})} z_0. \tag{4.5}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\| z_{n_j} - z_0 \right\|_{C(\overline{I})} &= \max \left\{ \left| z_{n_j}(x) - z_0(x) \right| : x \in \overline{I} \right\} \\ &\geq \left| z_{n_j}(x) - z_0(x) \right|, \quad \forall x \in \overline{I}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Donde segue que

$$z_{n_j}(x) \longrightarrow z_0(x), \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Ainda, de (4.6) temos,

$$\begin{aligned}
\left|z_{n_j}(x)-z_0(x)\right| &\leq \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{C(\bar{I})}\\
\Rightarrow \quad \left|z_{n_j}(x)-z_0(x)\right|^2 &\leq \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{C(\bar{I})}^2\\
\Rightarrow \quad \int_0^1 \left|z_{n_j}(x)-z_0(x)\right|^2 dx &\leq \int_0^1 \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{C(\bar{I})}^2 dx\\
\Rightarrow \quad \left(\int_0^1 \left|z_{n_j}(x)-z_0(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{C(\bar{I})}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
\Rightarrow \quad \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{L^2(I)} &\leq \left\|z_{n_j}-z_0\right\|_{C(\bar{I})} \longrightarrow 0 \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

disto segue que

$$z_{n_j} \overset{L^2(I)}{\longrightarrow} z_0. \qquad (4.8)$$

Como $\left\|u_{n_j}\right\| \geq 1$, então $0 < \dfrac{1}{\left\|u_{n_j}\right\|} \leq 1$. Logo aplicando (u_{n_j}) na desigualdade (4.3) e dividindo por $\left\|u_{n_j}\right\|$, temos

$$\left|\int_0^1 z_{n_j}'(x)v'(x)dx - \int_0^1 \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\left\|u_{n_j}\right\|}dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\left\|u_{n_j}\right\|}\|v\|, \qquad (4.9)$$

para toda $v \in H^1(I)$.

Como, $z_{n_j} \rightharpoonup z_0$ em $H^1(I)$ temos que $\int_0^1 z_{n_j}'(x)v'(x)dx \to \int_0^1 z_0'(x)v'(x)dx$, ver Exemplo 2.2.8. Fazendo $j \longrightarrow +\infty$ em (4.9) deduzimos que

$$\exists \lim_{j\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\left\|u_{n_j}\right\|}dx = \int_0^1 z_0'(x)v'(x)dx, \quad \forall v \in H^1(I). \qquad (4.10)$$

Nosso objetivo é mostrar que $z_0 \equiv 0$ e assim chegarmos a uma contradição. Para isso,vamos provar que:

(i) $z_0(x) \leq 0, \quad \forall x \in I$

(ii) $\int_0^1 z_0(x)dx = 0.$

Prova de (i):

Consideremos em (4.10), $v = z_0^+$, onde

$$z_0^+(x) \equiv \max\{z_0(x), 0\}, \quad \forall x \in I.$$

Consideremos também os seguintes subconjuntos de I:

$$I^+ = \{x \in I : z_0(x) > 0\},$$

e

$$I^- = \{x \in I : z_0(x) \le 0\}.$$

Então temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\|u_{n_j}\|}dx &= \int_{I^+\cup I^-} \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\|u_{n_j}\|}dx \\
&= \int_{I^+} \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\|u_{n_j}\|}dx + \int_{I^-} \frac{f(x,u_{n_j}(x))v(x)}{\|u_{n_j}\|}dx \\
&= \int_{I^+} \frac{f(x,u_{n_j}(x))z_0(x)}{\|u_{n_j}\|}dx
\end{aligned}$$

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 z_0'(x)v'(x)dx &= \int_{I^+\cup I^-} z_0'(x)v'(x)dx \\
&= \int_{I^+} z_0'(x)v'(x)dx + \int_{I^-} z_0'(x)v'(x)dx \\
&= \int_{I^+} (z_0'(x))^2dx \\
&\le \|z_0'\|^2_{L^2(I)} \le \|z_0'\|^2_{H^1(I)} < +\infty.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Logo,

$$\lim_{j\to+\infty} \int_{I^+} \frac{f(x,u_{n_j}(x))z_0(x)}{\|u_{n_j}\|}dx = \int_{I^+} (z_0'(x))^2dx. \tag{4.12}$$

Da Proposição 4.1.1,

$$\frac{f(x,u_{n_j}(x))z_0(x)}{\|u_{n_j}\|} \ge \frac{(\lambda u_{n_j}(x) - K_1)}{\|u_{n_j}\|}z_0(x) \ge \left(\lambda z_{n_j}(x) - \frac{K_1}{\|u_{n_j}\|}\right) z_0(x), \quad \forall x \in I^+. \tag{4.13}$$

Como $z_{n_j} \stackrel{C(\bar{I})}{\longrightarrow} z_0$, existe $k > 0$ tal que $\|z_{n_j}\|_{C(\bar{I})} \le k$, ou seja,

$$|z_{n_j}(x)| \le \|z_{n_j}\|_{C(\bar{I})} \le k, \quad \forall x \in I \tag{4.14}$$

daí,

$$z_{n_j}(x) \ge -k, \quad \forall x \in I.$$

Assim temos de (4.13)

$$\begin{aligned}
\frac{f(x,u_{n_j}(x))z_0(x)}{\|u_{n_j}\|} &\ge \left(-\lambda k - \frac{K_1}{\|u_{n_j}\|}\right) z_0(x) \\
&\ge -(\lambda k + K_1)z_0(x), \quad \forall x \in I^+.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Como $z_{n_j} \overset{C(\bar{I})}{\longrightarrow} z_0$, temos que $z_{n_j}(x) \to z_0(x)$, para todo $x \in I$, assim:

$$\lim_{j \to +\infty} u_{n_j}(x) = \lim_{j \to +\infty} \left\| u_{n_j} \right\| z_{n_j}(x) = +\infty.$$

Daí,

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{f(x, u_{n_j}(x)) z_0(x)}{\left\| u_{n_j} \right\|} = \lim_{j \to +\infty} \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{u_{n_j}} z_{n_j}(x) z_0(x) = +\infty, \quad \forall x \in I^+, \tag{4.16}$$

pois f é superlinear em $+\infty$, ver Observação 3.0.1, e z_{n_j} é uma sequência limitada. Suponhamos que $0 < |I^+|$, então pelo Lema de Fatou, ver Teorema 2.2.8, temos que

$$+\infty = \int_{I^+} \liminf_{j \to +\infty} \frac{f(x, u_{n_j}(x)) z_0(x)}{\left\| u_{n_j} \right\|} dx \quad \leq \quad \liminf_{j \to +\infty} \int_{I^+} \frac{f(x, u_{n_j}(x)) z_0(x)}{\left\| u_{n_j} \right\|} dx.$$

Logo,

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{I^+} \frac{f(x, u_{n_j}(x)) z_0(x)}{\left\| u_{n_j} \right\|} dx = +\infty,$$

o que é uma contradição com (4.11). Portanto $|I^+| = 0$. Donde segue que $z_0(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Prova de (ii):

Tomando $v = u_{n_j}$ em (4.3), temos:

$$\left| -\frac{1}{2} \int_0^1 (u'_{n_j}(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x) dx \right| \leq \frac{\epsilon_n}{2} \left\| u_{n_j} \right\|. \tag{4.17}$$

De (4.17) e (4.2), temos a seguinte desigualdade,

$$\left| \int_0^1 \left[\frac{f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x)}{2} - F(x, u_{n_j}(x)) \right] dx \right| \leq C + \frac{\epsilon_n}{2} \left\| u_{n_j} \right\|. \tag{4.18}$$

Dividindo (4.18) por $\left\| u_{n_j} \right\|$ temos,

$$\left| \int_0^1 \frac{\left[\frac{f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x)}{2} - F(x, u_{n_j}(x)) \right]}{\left\| u_{n_j} \right\|} dx \right| \leq \frac{C}{\left\| u_{n_j} \right\|} + \frac{\epsilon_n}{2}. \tag{4.19}$$

Fazendo $j \longrightarrow +\infty$ em (4.19) vemos que,

$$\lim_{j \to +\infty} \int_0^1 \frac{\left[\frac{f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x)}{2} - F(x, u_{n_j}(x)) \right]}{\left\| u_{n_j} \right\|} dx = 0. \tag{4.20}$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e fixemos $s^* > s_0$. Da condição (f_1), temos que existe uma constante $K_\epsilon > 0$, tal que

$$\left|\frac{f(x,s)s}{2} - F(x,s)\right| \leq \epsilon\,|s| + K_\epsilon, \quad \forall s \in (-\infty, s^*]. \tag{4.21}$$

Assim,

$$\int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \left|\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x,u_{n_j}(x))\right| dx \;\leq\; \int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \left(\epsilon\left|u_{n_j}(x)\right| + K_\epsilon\right) dx,$$

então, usando a desigualdade de Holder temos que,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \frac{\left[\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x,u_{n_j}(x))\right]}{\left\|u_{n_j}\right\|} dx\right| &\leq \frac{\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \left|u_{n_j}(x)\right| dx \\
&\quad + \frac{K_\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \left\|u_{n_j}\right\|_{L^2(I_\alpha)} |I_\alpha|^{1/2} + \frac{K_\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} |I_\alpha| \\
&\leq \frac{\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \left\|u_{n_j}\right\|_{L^2(I)} + \frac{K_\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \\
&\leq \frac{\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \left\|u_{n_j}\right\| + \frac{K_\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|} \\
&= \epsilon + \frac{K_\epsilon}{\left\|u_{n_j}\right\|}, \quad \forall j \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

onde $I_\alpha = \left\{x \in I : u_{n_j}(x) \leq s^*\right\}$. Então,

$$0 \;<\; \limsup_{j \to +\infty} \left|\int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \frac{\left[\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x,u_{n_j}(x))\right]}{\left\|u_{n_j}\right\|} dx\right| \leq \epsilon. \tag{4.23}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, podemos portanto, tomar ϵ tão pequeno quanto quisermos e assim teremos que

$$\lim_{j \to +\infty} \int_{\{u_{n_j} \leq s^*\}} \frac{\left[\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x,u_{n_j}(x))\right]}{\left\|u_{n_j}\right\|} dx = 0. \tag{4.24}$$

Sabemos de (4.1) que existe uma constante $K_1 > 0$, tal que

$$\left|f(x,u_{n_j}(x)) - \lambda u_{n_j}(x)\right| \leq K_1, \quad \forall x \in I_\alpha. \tag{4.25}$$

Dividindo (4.25) por $\left\|u_{n_j}\right\|_{H^1(I)}$, obtemos:

$$\frac{-K_1 + \lambda u_{n_j}(x)}{\|u_{n_j}\|} \leq \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} \leq \frac{K_1 + \lambda u_{n_j}(x)}{\|u_{n_j}\|}. \tag{4.26}$$

Seja $I - I_\alpha = \{x \in I : u_{n_j}(x) > s^*\}$, então a condição (f_2) implica na seguinte desigualdade,

$$-F(x, u_{n_j}(x)) \geq -\theta u_{n_j}(x) f(x, u_{n_j}(x)),$$

logo

$$-F(x, u_{n_j}(x)) + \frac{f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x)}{2} \geq -\theta u_{n_j}(x) f(x, u_{n_j}(x)) + \frac{f(x, u_{n_j}(x)) u_{n_j}(x)}{2},$$

para todo $x \in (I - I_\alpha)$.

Disto temos,

$$\begin{aligned}
\int_{I-I_\alpha} \frac{\left[\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x, u_{n_j}(x))\right]}{\|u_{n_j}\|} dx &\geq \int_{I-I_\alpha} \frac{\left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right) u_{n_j}(x) f(x, u_{n_j}(x))\right]}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{I-I_\alpha} \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_I \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{I_\alpha} \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\overbrace{\geq}^{(4.26)} \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_I \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_{I_\alpha} \frac{K_1 + \lambda u_{n_j}(x)}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_I \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \lambda \int_{I_\alpha} z_{n_j}(x) dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \frac{K_1}{\|u_{n_j}\|} |I_\alpha| \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \int_I \frac{f(x, u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|} dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \lambda \int_{I_\alpha} z_{n_j}(x) dx \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) s^* \frac{K_1}{\|u_{n_j}\|},
\end{aligned}$$

pois $0 \leq \int_{\{u_{n_j}\}} z_{n_j}(x) dx = \int_I z_{n_j}(x) dx - \int_{I_\alpha} z_{n_j}(x) dx$, implica que $\int_{I_\alpha} z_{n_j}(x) dx \leq \int_I z_{n_j}(x) dx$.

Tomando $v = 1$ em (4.10), temos que $\lim\limits_{j\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x,u_{n_j})}{\|u_{n_j}\|}dx = 0$, e levando em conta (4.24) e (4.20) de

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{I-I_\alpha}\frac{\left[\frac{f(x,u_{n_j}(x))u_{n_j}(x)}{2} - F(x,u_{n_j}(x))\right]}{\|u_{n_j}\|}dx \geq$$
$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\left[\int_I \frac{f(x,u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|}dx - \lambda\int_I z_{n_j}(x)dx - \frac{K_1}{\|u_{n_j}\|}\right], \tag{4.27}$$

temos que

$$0 \geq -\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\lim_{j\to+\infty}\int_0^1 z_{n_j}(x)dx. \tag{4.28}$$

Daí,

$$0 \geq -\left(\frac{1}{2}-\theta\right)s^*\lambda\int_I z_0(x)dx \geq 0, \tag{4.29}$$

donde segue que

$$-\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\lambda\int_I z_0(x)dx = 0, \tag{4.30}$$

e portanto, $\int_I z_0(x)dx = 0$.

Obeservemos que de (i) e (ii), concluimos que $z_0(x) = 0$, para todo $x \in I$. Além disso temos,

$$\lim_{j\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x,u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|}z_{n_j}(x)dx = 0. \tag{4.31}$$

Finalmente, tomando $v \equiv z_{n_j}$ e dividindo por $\|u_{n_j}\|$ em (4.3), temos que

$$\left|\int_0^1 (z'_{n_j})^2dx - \int_0^1 \frac{f(x),u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|}z_{n_j}(x)dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_{n_j}\|},$$

ou seja,

$$\left|1 - \int_0^1 (z_{n_j})^2dx - \int_0^1 \frac{f(x),u_{n_j}(x))}{\|u_{n_j}\|}z_{n_j}(x)dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_{n_j}\|}$$

Tomando o limite quando $j \longrightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{j\to+\infty}\int_0^1 (z_{n_j})^2dx = 1,$$

o que é uma contradição com (4.8). Assim (u_n) é limitada em $H^1(I)$. Como $H^1(I)$ é reflexivo e a imersão de Sobolev $H^1(I) \subset\subset C(\overline{I})$ é compacta, concluímos que (u_n) possui uma subsequência convergente em $H^1(I)$.

$\square$

Demonstração do Teorema 1.0.1 Pelos Teoremas 3.0.2, 3.0.3 e 4.1.1 as condições de compacidade e geometricas do Teorema de Silva são satisfeitas, o que garante ao funcional Φ associado ao problema (P), a existência de um ponto crítico diferente de zero, e consequentemente a existência de uma solução não trivial do problema (P).

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H.: *Dual Variatonal methods in critical point theory and aplications*, J. Funct. Anal. **14**, 349-381 (1973).

[2] Brezis, H.: *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984. 5, 8, 15, 17, 18

[3] Coelho, Flávio Ulhoa, Loureno, Mary Lilian.: *Um Curso de Álgebra Linear*, 2.ed. rev. e ampl., 1. reimpr- São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2007. -(Acadêmica, 34). 13

[4] D.Arcoya, S. Villegas,: *Nontrivial Solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$*, Math-Z.219, n. 4, 1995 pp.499-513. 1, 2

[5] De Figueiredo, D.G., Ruf, B.: *On a superlinear Sturn-Liouville equation and a related bouncing problem.* J Reine Angew. Math. **421**, 1-22(1991). dsi Silva, E.A.: *Linking theorems and aplications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonl. Anal. TMA 16, 455-477 (1991). 2, 3, 26

[6] Kreyszig, Erwin.: *Introductory Functional Analysis with applications*, John Wiley and Sons. Inc., 1978 5, 7, 9, 10, 19

[7] Lima, Elon Lages: *Curso de Análise*, v.1, 11.ed. - Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. 431 pp., ilust., (Projeto Euclides)

[8] Schilling, René L.: *Measures, Integrals and Martingales*, Cambridge University Press, 2005 eber Yosida, K.: *Functional Analysis*, 1965. 14, 15

[9] Silva, E.A.: *Linking theorems and aplications to semilinear elliptic problems at resonance*, Nonl. Anal. TMA 16, 455-477 (1991). iii, 2

[10] Yosida, K.: *Functional Analysis*, 1965. 19, 20